

**POLITECHNIKA**



**BIAŁOSTOCKA**

**WYDZIAŁ**



**INŻYNIERII  
ZARZĄDZANIA**

**KATEDRA ZARZĄDZANIA PRODUKCJĄ**

Instrukcja do zajęć laboratoryjnych z przedmiotu:

***FIZYKA***

Kod przedmiotu: IS01137

**Ćwiczenie Nr 4**

**Wyznaczanie współczynnika tarcia tocznego  
za pomocą wahadła nachylnego**

**Autor:**

dr inż. Krzysztof Kamil Żur

dr inż. Wojciech Jarmoc

mgr inż. Patrycja Rogowska

Białystok 2019

*Wszystkie prawa zastrzeżone*

*Wszystkie nazwy handlowe i towarów występujące w niniejszej instrukcji są znakami towarowymi zastrzeżonymi lub nazwami zastrzeżonymi odpowiednich firm odnosnych właścicieli.*

## 1. Podstawy teoretyczne

Ruch toczącego się koła, (kuli, walca) jest złożony: środek masy  $S$  porusza się ruchem postępowym, a koło obraca się wokół przechodzącej przez nie osi. Jeżeli promień koła wynosi  $r$ , prędkość środka masy  $v$ , a prędkość kątową obrotu  $\omega$ , to:

$$v = \frac{ds}{dt} = \omega r, \quad (1.1)$$

gdzie  $s$  jest współrzędną w kierunku ruchu. Maksymalna siła tarcia  $T_0$ , działająca na obwodzie koła w kierunku ruchu, jest równa iloczynowi współczynnika tarcia  $\mu_0$  i siły dociskającej koło do podłoża, równej reakcji podłoża  $F_n$ :

$$T_0 = \mu_0 F_n = \mu_0 mg. \quad (1.2)$$

Jeżeli nie ma poślizgu, to tarcie jest statyczne, bo chwilowy punkt styczności nie przesuwa się względem podłoża. Równanie ruchu postępowego jest następujące (rys. 2):

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = T - F',$$

$$F_0 = T \leq T_0. \quad (1.3)$$

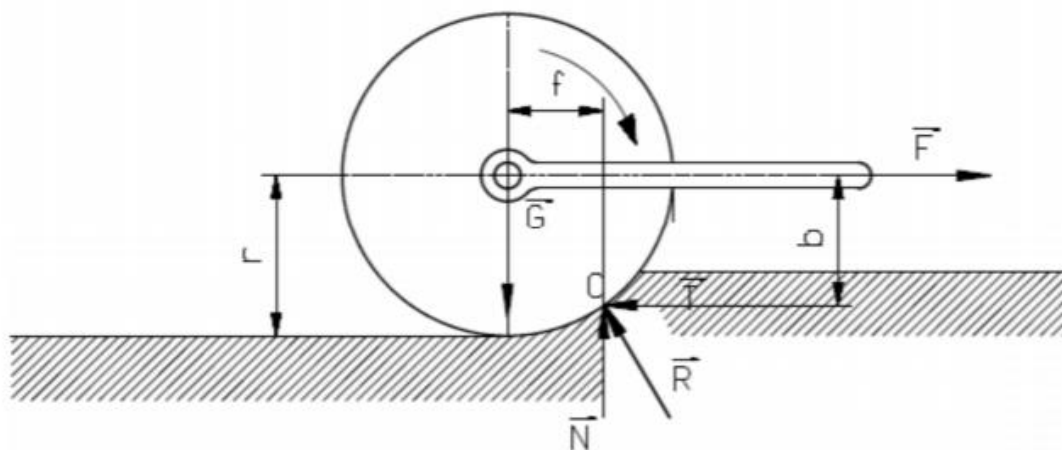
gdzie:

$F_0$  - siła obwodowa,

$m = F_n / g$ , natomiast  $F'$  oznacza pozostałe opory ruchu, np. opór powietrza.

### Tarcie toczne

Walec o ciężarze  $\vec{G}$  ciągnięty jest po poziomej płaszczyźnie siłą  $\vec{F}$  zaczepioną na czopach tego walca (rys.1).



Rys. 1. Rozkład sił podczas toczenia walca

Siła ciągnąca  $\vec{F}$  stara się obrócić walec dookoła punktu  $O$ . Iloczyn siły  $\vec{F}$  przez jej odległość od punktu  $O$  będzie momentem obrotowym działającym na walec

$$M = F \cdot b. \quad (1.4)$$

Jeżeli przy małych wartościach siły  $\vec{F}$  moment ten nie wywołuje obrotu, to wnioskujemy, że jest on zrównoważony momentem tarcia. Zwiększając siłę ciągnącą dochodzimy do przypadku równowagi granicznej. Na walec działają wtedy trzy siły: siła ciągnąca  $\vec{F}$ , ciężar walca  $\vec{G}$  i reakcję  $\vec{R}$  płaszczyzny. Ta ostatnia musi przechodzić przez punkt obrotu O i jest skierowana ku środkowi walca (wynika to z warunków równowagi trzech sił).

Reakcję  $\vec{R}$  płaszczyzny możemy zastąpić dwiema siłami składowymi: normalną  $\vec{N}$  oraz styczną  $\vec{T}$  do płaszczyzny. Z warunków rzutów na kierunek pionowy i poziomy otrzymujemy wartości tych składowych

$$\vec{N} = \vec{G} \text{ oraz } \vec{T} = \vec{F}. \quad (1.5)$$

Dla równowagi również suma momentów wszystkich sił działających na walec względem punktu obrotu O musi się równać zero.

Wtedy równanie momentów przybierze postać

$$\vec{F} \cdot b = \vec{G} \cdot f \Rightarrow \vec{F} = \frac{\vec{G} \cdot f}{b}. \quad (1.6)$$

Wobec małej wartości  $f$  różnica między stosunkiem  $f / b$  ( $b$  - ramię siły), a  $f / r$  ( $r$  - promień walca) jest znikomo mała, więc można w powyższym wzorze wstawić  $b=r$ , czyli ostatecznie

$$\vec{F} = \frac{\vec{G} \cdot f}{r}. \quad (1.7)$$

Powyższy wzór przedstawia całkowity opór toczenia. Każda siła  $\vec{F} > \frac{\vec{G} \cdot f}{r}$  powoduje toczenie walca. Ramię  $f$ , przedstawiające odległość przyłożenia oddziaływania normalnego  $\vec{N}$  od teoretycznego miejsca styku walca z płaszczyzną, mierzone jest w jednostkach długości (cm) i nazywane **współczynnikiem tarcia tocznego**.

Gdy płaszczyzna, po której toczy się walec, była całkowicie nieodkształcalna, współczynnik tarcia tocznego  $f$  równałby się zero. Również całkowity opór toczenia  $\vec{F}$  miałby wartość równą zero. Do toczenia walca w takim przypadku wystarczyłaby dowolnie mała siła  $\vec{F} \neq 0$ . Ze wzoru na całkowity opór toczenia wynika, że ze wzrostem promienia toczącego się elementu opór maleje.

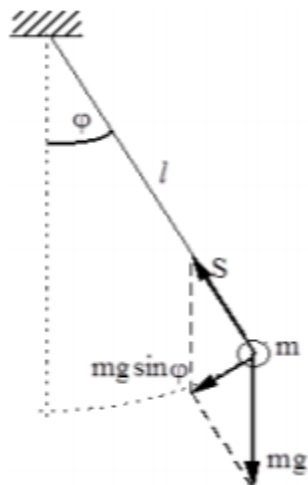
W tabeli 1 podano wartości współczynników tarcia dla wybranych materiałów.

**Tabela 1.** Współczynnik tarcia tocznego

<b>Material</b>	<b><math>f(cm)</math></b>
Koło żeliwne po żelwie lub stali	0,005
Koło stalowe po stali	0,005
Koło drewniane po drewnie	0,06 – 0,16
Koło żeliwne po drewnie	0,15
Koło stalowe po bruku	0,1 – 0,2
Koło stalowe w łożyskach tocznych	0,0005 – 0,001
Koło gumowe po gruncie	1,0 - 1,5

## Wahadło matematyczne

Na wychyloną kulkę o masie  $m$  (rys.2) działa siła ciężkości (ciężar) skierowana pionowo w dół i siła napięcia nici  $S$ , skierowana wzdłuż niej w górę do punktu zaczepienia. Wobec tego moment  $M_s$  siły  $S$  względem środka obrotu jest stale równy zero i jej praca  $dW_s = M_s d\varphi = 0$ . Przy danym kącie wychylenia  $\varphi$  moment ciężaru względem punktu zaczepienia wynosi  $M = mgl \sin\varphi$  i jego praca  $dW = dEk = -Md\varphi = -mgl \sin\varphi d\varphi$ . Znak minus pochodzi stąd, że w rozpatrywanej fazie ruchu kąt  $\varphi$  maleje, czyli  $d\varphi < 0$ .



Rys. 2. Schemat wahadła matematycznego

Równanie wahadła matematycznego dla małych wychyleń ma postać:

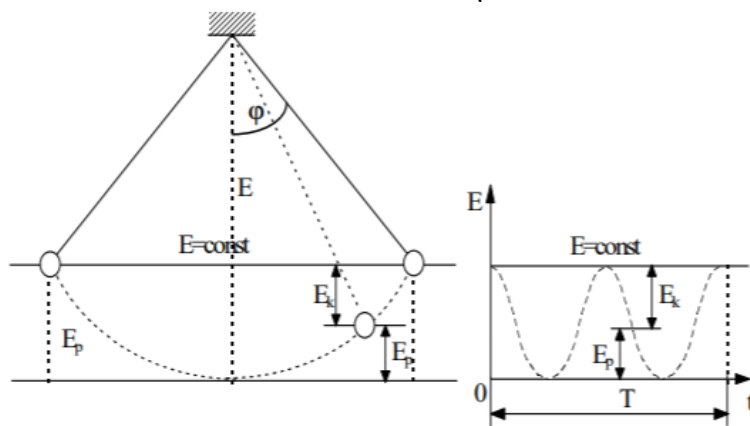
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi. \quad (1.8)$$

Rozwiązaniem równania jest:

$$\varphi = \varphi_0 \cos\omega t, \quad (1.9)$$

gdzie:

$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  oznacza częstość kołową natomiast  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  jest okresem drgań wahadła.



Rys. 3. Przemiany energii w ruchu wahadła, gdzie krzywa ----- przedstawia zależność energii potencjalnej od położenia, a podana wartość energii odnosi się do małych wychyleń.

Całkowita energia mechaniczna wahadła mechanicznego (rys.3) wynosi:

$$E_k + E_p = mgh = mgl(1 - \cos\varphi_0) = mgl \cdot 2\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{mgl\varphi_0^2}{2} = \text{const.} \quad (1.10)$$

Ogólnie, w ruchu harmonicznym energia mechaniczna jest wyrażona wzorem:

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const}, \quad (1.11)$$

gdzie:

$A$  - amplituda drgań,

$k$  - współczynnik sprężystości.

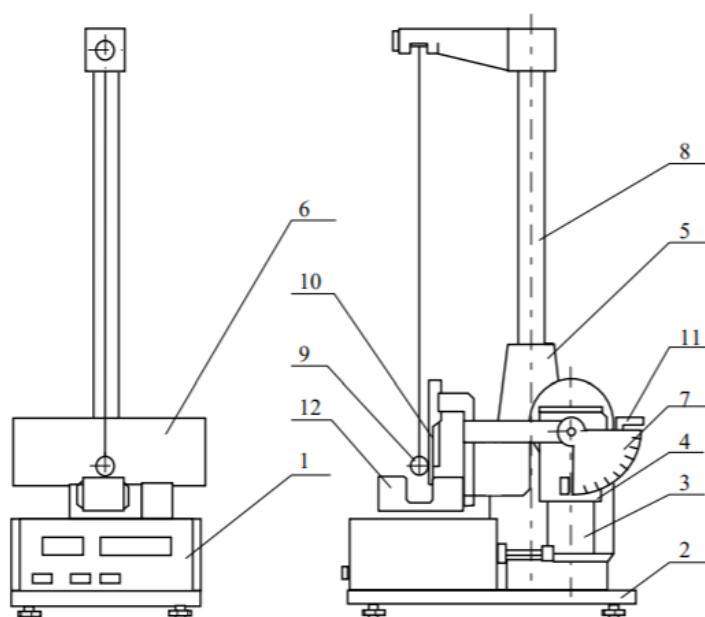
## 2. Cel i zakres ćwiczenia laboratoryjnego

Wyznaczenie współczynnika tarcia tocznego za pomocą wahadła nachylnego dla zestawów kulka - podłoże, wykonanych z aluminium, mosiądzu i stali oraz przeprowadzenie badań przy różnych kątach nachylenia wahadła podanych przez prowadzącego.

## 3. Metodyka badań

### a) Opis stanowiska badawczego

Schemat budowy wahadła nachylnego, wraz z opisem jego części składowych przedstawiono na rys.4. Kulka metalowa zawieszona na nici przy kącie nachylenia kolumny wahadła  $\beta = 0^\circ$  stanowi wahadło matematyczne. Pochylenie wahadła za pomocą pokrętła *II* o wybrany kąt  $\beta$ , czyni je wahadłem nachylnym. Wartość kąta  $\beta$  ustalana jest za pomocą skali *II*. Zawieszona na nici kulka wychylona z położenia równowagi o kąt  $\varphi_0$ , będzie się teraz toczyć po podłożu metalowym, umieszczonym w uchwycie wahadła. Wartość kąta  $\varphi_0 \cong (4 - 5)^\circ$  określana jest za pomocą skali *I*. Amplituda wychylenia wahadła, wskutek występującego tarcia tocznego, ulega zmniejszeniu. Odczytana na skali *I* wartość kąta  $\varphi_n$  wychylenia kulki po  $n$  okresach drgań wahadła jest mniejsza od  $\varphi_0$  ( $\varphi_n < \varphi_0$ ), gdzie  $\varphi_0$  - kąt początkowego wychylenia kulki.



Rys. 4. Wahadło nachylne

gdzie:

- |                                    |                                     |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 – milisekundomierz               | 7 - skala II                        |
| 2 - podstawa wahadła               | 8 - kolumna do zawieszania nici     |
| 3 – rura                           | 9 - kulka z wodnikiem               |
| 4 - korpus z przekładnią ślimakową | 10 - próbki metalowe                |
| 5 - wspornik                       | 11 - pokrętło do pochylania wahadła |
| 6 - skala I                        | 12 - czujnik fotoelektryczny        |

Wyznaczanie współczynnika tarcia tocznego dla danej pary kula - podłoże, polega na odczycie wskazań milisekundomierza uniwersalnego i pomiarze wzrokowym zmian kąta wychylenia wahadła po  $n$  okresach. Wartość współczynnika tarcia tocznego określona jest wzorem:

$$\mu_{\tau} \cong R \cdot \frac{\varphi_0 - \varphi_n}{4 \cdot n} \cdot \operatorname{ctg} \beta, \quad (3.1)$$

w którym:

- $R$  - promień kuli [m],
- $\varphi_0$  - kąt początkowego wychylenia wahadła [rad],
- $\varphi_n$  - kąt odczytany po  $n$  okresach [rad],
- $n$  - liczba okresów,
- $\beta$  - kąt pochylenia kolumny wahadła odczytany na skali bocznej [deg].

## b) Przebieg realizacji eksperymentu

1. Skontrolować wypoziomowanie przyrządu.
2. Wcisnąć przełącznik SIEĆ kontrolując, czy wszystkie wskaźniki miernika wyświetlają cyfrę zero oraz czy zaświeciła się żarówka czujnika fotoelektrycznego.
3. Ustalić długość wahadła tak, aby "wodnik" przecinał strumień światła czujnika fotoelektrycznego (480 ### 10 mm).
4. Ramię pochylne przyrządu pochylić o kąt  $\beta$  wskazany przez prowadzącego.
5. Kulkę wychylić z położenia równowagi o kąt  $\varphi_0 = 5 - 9^\circ$  (lub o kąt wskazany przez prowadzącego).
6. Zmierzyć okres drgań wahadła dla liczby pełnych wahaní kulki  $n=10$  (lub liczba wahaní kulki wskazana przez prowadzącego), odczytać kąt  $\varphi_n$  dla tej liczby wahaní.
7. Pomiary wykonać dla kąta wskazanych przez prowadzącego, powtarzając czynności wg punktów 3, 5 i 6.
8. Powtórzyć pomiary dla innych zestawów kulka - podłoże.
9. Wyznaczyć średnicę kulek wybranych do badań.
10. Wyniki pomiarów zestawić tabeli 2,3,4.

**Tabela 2.** Wyniki pomiarów dla aluminium

$R [m]$	$\beta [deg]$	$\varphi_{oi} [rad]$	$\varphi_{ośr} [rad]$	$\varphi_{ni} [rad]$	$\varphi_{nśr} [rad]$	$n$	$\mu_{\tau} [m]$
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			



**Tabela 3.** Wyniki pomiarów dla stali

$R [m]$	$\beta [deg]$	$\varphi_{oi} [rad]$	$\varphi_{ośr} [rad]$	$\varphi_{ni} [rad]$	$\varphi_{nśr} [rad]$	$n$	$\mu_{\tau} [m]$
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			

**Tabela 4.** Wyniki pomiarów dla mosiądzu

$R [m]$	$\beta [deg]$	$\varphi_{oi} [rad]$	$\varphi_{ośr} [rad]$	$\varphi_{ni} [rad]$	$\varphi_{nśr} [rad]$	$n$	$\mu_{\tau} [m]$
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			
		1.		1.			
		2.		2.			
		3.		3.			
		4.		4.			
		5.		5.			

11. Współczynnik tarcia tocznego obliczyć ze wzoru:

$$\mu_{\tau} \cong R \cdot \frac{\varphi_0 - \varphi_n}{4 \cdot n} \cdot ctg\beta \quad [\text{jednostka w układzie SI}].$$

12. Niepewność systematyczną pomiaru  $\mu_{\tau}$  obliczyć metodą różniczki zupełnej:

$$\Delta\mu_{\tau} = \left| \frac{\delta\mu_{\tau}}{\delta R} \right| |\Delta R| + \left| \frac{\delta\mu_{\tau}}{\delta\varphi_0} \right| |\Delta\varphi_0| + \left| \frac{\delta\mu_{\tau}}{\delta\varphi_n} \right| |\Delta\varphi_n| + \left| \frac{\delta\mu_{\tau}}{\delta\beta} \right| |\Delta\beta| \quad (3.2)$$

Niepewność pomiarów wykonywanych bezpośrednio:  $\Delta R$ ,  $\Delta\varphi_0$ ,  $\Delta\varphi_n$ ,  $\Delta\beta$  określić na podstawie klasy dokładności przyrządu pomiarowego. Niepewność  $\Delta\varphi_0$  oszacować jako 0.1 część najmniejszej działki skali pomiarowej I.

13. Wyniki obliczeń zapisać w postaci:  $(\mu_\tau \pm \Delta\mu_\tau)$ .

14. Dokonać analizy wpływu czynników niekontrolowanych na końcowy wynik pomiaru.

## 4. Sprawozdanie studenckie

**Sprawozdanie studenckie powinno zawierać:**

1. Cel i zakres ćwiczenia laboratoryjnego.
2. Opis zjawiska tarcia oraz wyprowadzenie wzoru na współczynnik tarcia tocznego  $\mu_\tau$ .
3. Opis stanowiska badawczego.
4. Przebieg realizacji eksperymentu.
5. Zestawienie wyników pomiarów w tabeli i ich analiza.
6. Obliczenie wartości współczynnika tarcia tocznego.
7. Obliczenia niepewności systematycznej pomiaru.
8. Analizę wpływu czynników niekontrolowanych na końcowy wynik pomiaru.
9. Wnioski wynikające z przeprowadzonych pomiarów.

## Pytania kontrolne

1. Podaj definicję tarcia oraz wymień jego rodzaje.
2. Podaj definicję tarcia tocznego.
3. Opisz rozkład sił podczas toczenia walca. Przedstaw zjawisko na rysunku.
4. Wyjaśnij pojęcie współczynnika tarcia tocznego. Przedstaw wzór, wyjaśnij oznaczenia oraz zdefiniuj jednostkę.
5. Opisz rozkład sił w wahadle matematycznym. Przedstaw zjawisko na rysunku.
6. Wyjaśnij różnicę między wahadłem matematycznym, a wahadłem nachylnym.

## Literatura

1. Leyko J. (2005), Mechanika ogólna, Tom 1,2, Państwowe Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
2. Jeżewski M. (1966), Fizyka, Państwowe Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
3. Dryński T. (1977), Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki, Państwowe Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

## Wymagania BHP

Warunkiem przystąpienia do praktycznej realizacji ćwiczenia jest zapoznanie się z instrukcją BHP i instrukcją przeciwpożarową oraz przestrzeganie zasad w nich zawartych. Wybrane urządzenia dostępne na stanowisku laboratoryjnym mogą posiadać instrukcje stanowiskowe. Przed rozpoczęciem pracy należy zapoznać się z instrukcjami stanowiskowymi wskazanymi przez prowadzącego.

W trakcie zajęć laboratoryjnych należy przestrzegać następujących zasad.

- Sprawdzić, czy urządzenia dostępne na stanowisku laboratoryjnym są w stanie kompletnym, nie wskazującym na fizyczne uszkodzenie.
- Sprawdzić prawidłowość połączeń urządzeń.

- Załączenie napięcia do układu pomiarowego może się odbywać po wyrażeniu zgody przez prowadzącego.
- Przyrządy pomiarowe należy ustawić w sposób zapewniający stałą obserwację, bez konieczności nachylania się nad innymi elementami układu znajdującymi się pod napięciem.
- Zabronione jest dokonywanie jakichkolwiek przełączeń oraz wymiana elementów składowych stanowiska pod napięciem.
- Zmiana konfiguracji stanowiska i połączeń w badanym układzie może się odbywać wyłącznie w porozumieniu z prowadzącym zajęcia.
- W przypadku zaniku napięcia zasilającego należy niezwłocznie wyłączyć wszystkie urządzenia.
- Stwierdzone wszelkie braki w wyposażeniu stanowiska oraz nieprawidłowości w funkcjonowaniu sprzętu należy przekazywać prowadzącemu zajęcia.
- Zabrania się samodzielnego włączania, manipulowania i korzystania z urządzeń nie należących do danego ćwiczenia.
- W przypadku wystąpienia porażenia prądem elektrycznym należy niezwłocznie wyłączyć zasilanie stanowisk laboratoryjnych za pomocą wyłącznika bezpieczeństwa, dostępnego na każdej tablicy rozdzielczej w laboratorium. Przed odłączeniem napięcia nie dotykać porażonego.