POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA

WYDZIAŁ ZARZĄDZANIA

KATEDRA ZARZĄDZANIA PRODUKCJĄ

Instrukcja do zajęć laboratoryjnych z przedmiotu:

PODSTAWY TECHNIKI I TECHNOLOGII

Kod przedmiotu: **IS01123, IN01123**

Numer ćwiczenia: **12**

Temat: **Pomiar drgań belki metodą wymuszenia inercyjnego**

Opracowanie:

mgr inż. Elżbieta Krawczyk-Dembicka

Białystok 2015

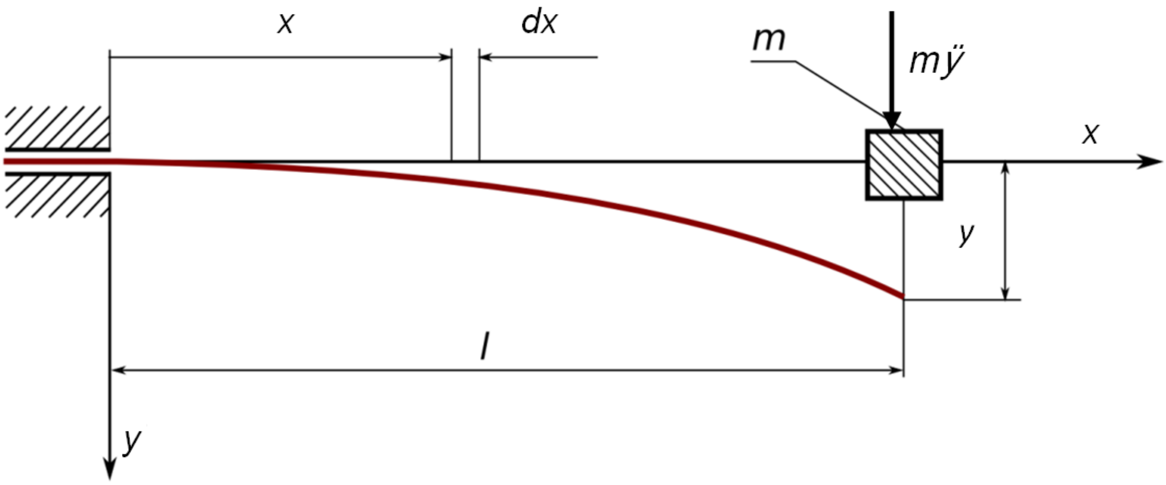
1. WPROWADZENIE

Drgania są to ruchy oscylacyjne cząsteczek lub ciał o określonych masach, które zachodzą w stosunku do określonego układu odniesienia. Do opisu drgań wykorzystywane są trzy główne parametry: przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie. Wyróżnia się następujące rodzaje drgań:

- *drgania mechaniczne* – ruchy ciała lub jego części określone zmienną w czasie wielkością, których wartość na przemian rośnie lub maleje względem wartości średniej w następujących po sobie kolejno przedziałach;
- *drgania okresowe* – drgania powtarzające się w równych odstępach czasu, szczególnym przypadkiem jest ruch harmoniczny;
- *drgania nieokresowe* – drgania powtarzające się w nierównych odstępach czasu, szczególnym przypadkiem drgań są tu drgania prawie okresowe;
- *drgania ustalone* – drgania stałe w czasie;
- *drgania nieustalone* – drgania zmienne w czasie;
- *drgania liniowe* – drgania układu sprężystego, w którym siły wewnętrzne są liniowymi funkcjami przemieszczeń;
- *drgania swobodne* – drgania odbywające się bez udziału zmiennych sił zewnętrznych wpływających na proces drgań, jednocześnie energia drgań nie ulega zmianie;
- *drgania nieswobodne* – drgania odbywające się z udziałem zmiennych sił zewnętrznych;
- *drgania wymuszone* – drgania nieswobodne powstające pod wpływem działania okresowo zmiennych sił zewnętrznych, mogą prowadzić do powstania rezonansu drgań;
- *drgania tłumione* – drgania, które pod wpływem działania na nie innego układu (np. sił tarcia) zmniejszają swoją energię, zamieniając ją w energię cieplną;
- *drgania samowzbudne* – drgania wymuszone siłami wywołanymi przez sam ruch drgający.

1.1. Opis drgań belki wspornikowej w układzie dyskretnym

Analizując drgania belki w układzie dyskretnym można pominąć wpływ masy belki na drgania całego układu. Podejście to jest słuszne w przypadku występowania w układzie mas skupionych, które znacznie przewyższają masę samej konstrukcji. Tak więc w sytuacji, gdy nie uwzględnia się tłumienia, o drganiach decydują wartości mas skupionych, sztywność konstrukcji oraz warunki początkowe. W celu opisu drgań za pomocą równań różniczkowych niezbędne jest zastosowanie ogólnej postaci drugiej zasady dynamiki *Newtona*, drugiej zasady dynamiki z wykorzystaniem zasady *de'Alamberta* oraz równania *Lagrange'a*, które uwzględnia siły i przemieszczenia uogólnione. Przy wyprowadzeniu równania różniczkowego drgań belki wspornikowej pomocne będzie zastosowanie zasady *de'Alamberta* oraz całki *Maxwell-Mohra*.



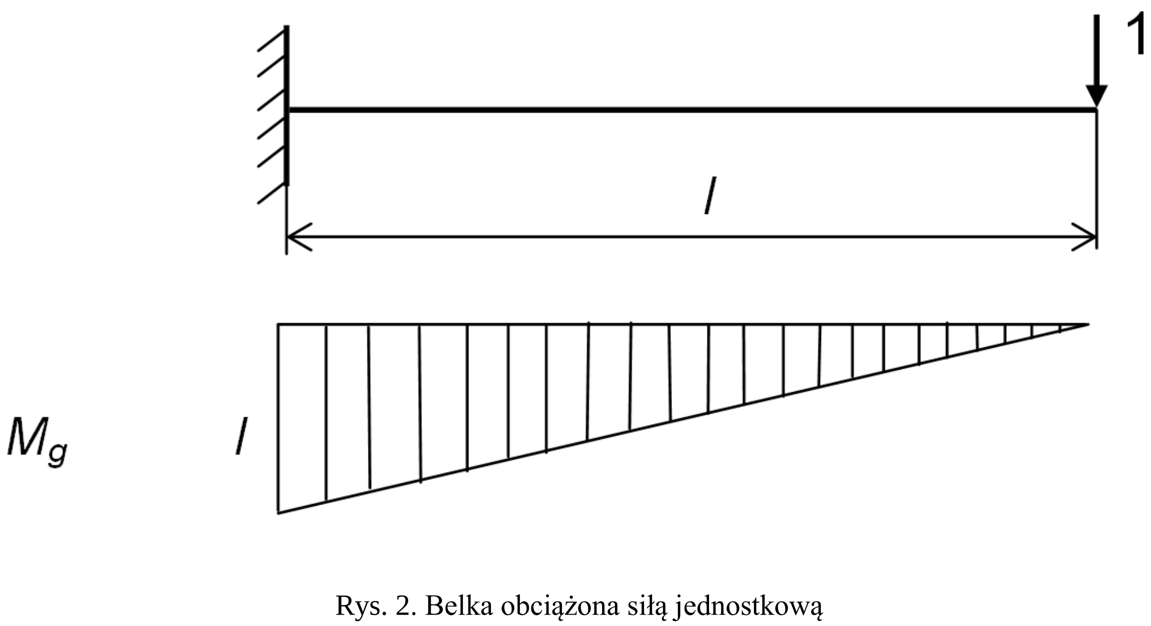
Rys. 1. Belka wspornikowa jednostronnie obciążona masą *m*

Stosując zasadę *de'Alamberta* do drgającej masy m umieszczonej w odległości l na współrzędnej *x* (Rys. 1), otrzymamy równanie o postaci:

$$m\ddot{y} + ky = 0 \tag{1}$$

gdzie *k* jest sztywnością belki wspornikowej na długości *l*.

Sztywność k można również wyznaczyć poprzez przyłożenie do końca belki siły jednostkowej ($P = 1$) i obliczenie całki *Maxwell-Mohra* za pomocą metody *Wereszczagina* (Rys. 2).



Rys. 2. Belka obciążona siłą jednostkową

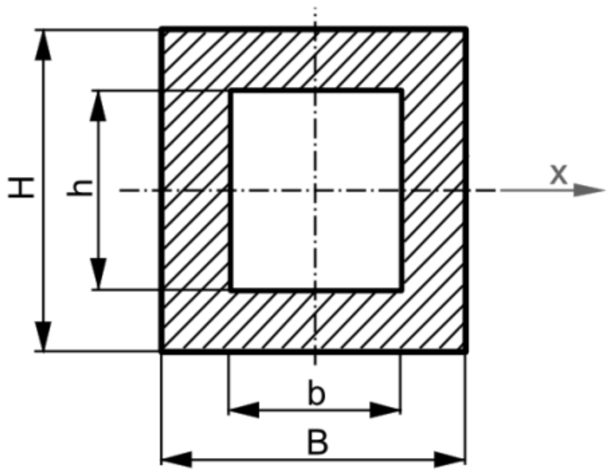
Stała sztywności *k* jest odwrotnością całki *Maxwell-Mohra*i wynosi:

$$k = \frac{l^3}{3EJ} \tag{2}$$

gdzie:

E – moduł Younga (dla stali wynosi on $2 \cdot 10^5 MPa$)

J – moment bezwładności przekroju belki obliczany względem osi x (Rys. 3) wynosi:



Rys. 3. Przekrój belki prostokątnej

$$J = \frac{BH^3 - bh^3}{12} \tag{3}$$

Uwzględniając zależność nr (2) w równaniu różniczkowym drgań belki, równanie nr (1) przyjmie następującą postać:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{4}$$

gdzie:

ω – częstość drgań własnych belki wspornikowej wynosząca:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}} \tag{5}$$

1.2. Opis drgań belki wspornikowej o masie *m*

Badanie drgań belki jako układu o ciągłym rozmieszczeniu masy można przeprowadzić za pomocą metody ścisłej (metoda *Fouriera*) traktując belkę jako nieskończony zbiór mas *dm* wraz z umieszczoną na końcu masą *m*. Stosując tą metodę otrzymuje się nieskończenie wiele częstości własnych drgań układu. Jednakże metoda ta jest dość pracochłonna, ponadto zaś nie zawsze istnieje rozwiązanie ścisłe. Dlatego też stosuje się rozwiązania przybliżone. Metodami przybliżonymi są: metoda *Ritza,* metoda *Galerkina*, metoda *Rayleigha*. Stosując dwie pierwsze można uzyskać wiele pierwszych częstości drgań własnych. Metodą *Rayleigha* wyznaczyć można częstość podstawową drgań własnych.

W metodzie *Rayleigha* zastępujemy drgania układu o masie ciągłej drganiami punktu materialnego. Z rozwiązania ścisłego wynika, że:

$$y = X(x) \cdot q(t), \tag{6}$$

gdzie:

X(x) – postać drgań własnych

q(t) – funkcja czasu.

W przypadku punktu materialnego funkcja *X(x)* przyjmuje wartość równą jedności, stąd też drgania opisane są przez funkcję $q(t) = q_z(t)$ dla układu zastępczego. Energia kinetyczna i potencjalna takiego układu jest równa odpowiednio:

$$T_z = \frac{m_z}{2}\left(\frac{d}{dt}[q_z(t)]\right)^2 \quad \text{i} \quad V_z = \frac{1}{2}k_z[q_z(t)]^2 \tag{7}$$

gdzie:

m_z – masa układu zastępczego

k_z – sztywność układu zastępczego

Masę i sztywność układu zastępczego wyznacza się z porównania energii kinetycznej oraz energii potencjalnej układu rzeczywistego i zastępczego. Ażeby wyznaczyć masę oraz sztywność układu zastępczego należy obrać punkt redukcji układu rzeczywistego do układu zastępczego. W punkcie redukcji funkcja *X(x)* przybiera wartość równą 1. Dla rozważanego przypadku mamy więc:

$$m_z = \int_0^l \rho_l[X(x)]^2 dy + m[X(l)]^2 \tag{8}$$

oraz

$$k_z = \int_0^l EJ\left[\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}\right]^2 dx \tag{9}$$

gdzie:

ρ_l – liniowa masa właściwa belki

E – moduł Younga.

Dla takich zależności pierwsza częstość drgań belki wyniesie:

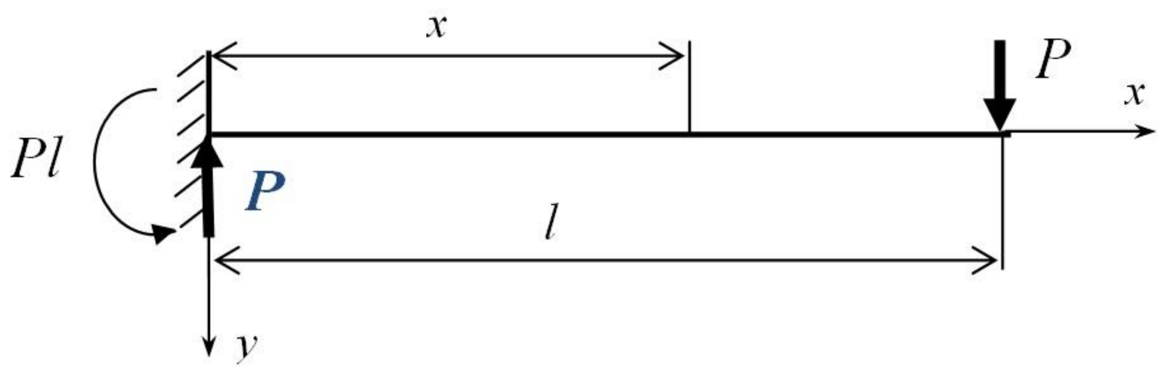
$$\omega = \sqrt{\frac{k_z}{m_z}} \tag{10}$$

Funkcję *X(x)* można uzyskać po wybraniu punktu redukcji np. w miejscu zamocowania masy *m* belki wspornikowej. Funkcję tę otrzymuje się dzieląc równanie opisujące linię ugiętej belki przez ugięcie w miejscu redukcji. Równanie linii ugiętej belki otrzymuje się stosując równanie *Eulera*:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -M_g(x) \tag{11}$$

gdzie:

$M_g(x)$ – moment gnący (dla belki jak na Rys. 4)



Rys. 4. Belka równoważona momentem gnącym

Równanie *Eulera* (11) przyjmuje więc postać:

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = Pl - Px \tag{12}$$

Dokonując dwukrotnego całkowania równania po *x* i uwzględniając następujące warunki brzegowe:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad i \quad y = 0 \quad dla \quad x = 0 \tag{13}$$

otrzymuje się równanie linii ugiętej belki w postaci:

$$y = \frac{P}{EJ}\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \tag{14}$$

Ugięcie w miejscu redukcji (dla $x = l$) wyniesie:

$$y = \frac{Pl^3}{3EJ} \tag{15}$$

W związku z powyższym funkcja *X(x)*, tzw. zredukowana linia ugiętej belki przyjmie postać:

$$X(x) = \frac{3x^2}{2l^2} - \frac{3x^3}{6l^3} \tag{16}$$

Stosując wzór (8) na masę zastępczą m_z oraz (9) na sztywność zastępczą k_z otrzymamy:

$$k_z = \frac{3EJ}{l^3} \quad \text{i} \quad m_z = 0{,}2357\rho_l l + m \tag{17}$$

Tak więc podstawowa częstość drgań własnych belki wyniesie:

$$\omega = \sqrt{\frac{3EJ}{l^3(0{,}2357\rho_l l + m)}} \tag{18}$$

2. CEL I ZAKRES ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest praktyczne zapoznanie studentów z analizą drgań belki wspornikowej wymuszonych inercyjnie.

Zakres ćwiczenia obejmuje wyznaczenie podstawowej częstości drgań własnych belki jako układu dyskretnego oraz układu ciągłego z wykorzystaniem metody Rayleigha. Weryfikacja obu wyznaczonych częstości przeprowadzona zostanie na drodze doświadczalnej z wykorzystaniem drgań rezonansowych i swobodnych rozpatrywanej belki.

3. PRZEBIEG ĆWICZENIA

1) Zapoznanie się ze stanowiskiem pomiarowym
2) Wykonanie pomiaru mierzonych parametrów
3) Wyznaczenie teoretycznej częstości własnej drgań belki wspornikowej:
   a) bez uwzględnienia masy belki (wzór 5),
   b) z uwzględnieniem masy belki (wzór 18).
4) Wyznaczenie doświadczalnej częstości ω_d drgań belki metodą rezonansową
5) Porównanie częstości ω i ω_d według wzoru:

$$\Delta\omega = \frac{|\omega_d - \omega|}{\omega_d} \cdot 100\%$$

6) Opracowanie wniosków na podstawie otrzymanej wartości *Δω*
7) Wykonanie pisemnego sprawozdania z przebiegu ćwiczenia

Stanowisko pomiarowe:

Sprawozdanie powinno zawierać

1. Imiona, nazwiska, kierunek i rok studiów oraz nr grupy laboratoryjnej członków zespołu
2. Temat ćwiczenia
3. Datę wykonania ćwiczenia
4. Krótki opis stosowanej metody badawczej
5. Schemat stanowiska
6. Wyniki wykonanych pomiarów
7. Wnioski z przeprowadzonego ćwiczenia

Przykładowe pytania kontrolne:

1. Podaj definicję drgań.
2. Wymień i krótko scharakteryzuj rodzaje drgań.
3. Scharakteryzuj od czego zależy częstość drgań własnych belki.

Przepisy BHP

1. Prowadzący ćwiczenia laboratoryjne, przed przystąpieniem do ćwiczenia, zapoznaje studentów z obsługą stanowiska. Kontrolę przestrzegania przez studentów instrukcji BHP (przedstawioną na zajęciach wprowadzających) pełni prowadzący zajęcia.
2. Studenci obsługują stanowisko pod nadzorem prowadzącego.
3. Stanowiska niebezpieczne pod względem BHP obsługuje prowadzący, a w przypadku konieczności, po udzieleniu osobnego instruktażu, dopuszcza do obsługi stanowiska konieczną ilość studentów.
4. Studenci odbywający ćwiczenia zobowiązani są do zachowania maksymalnej ostrożności i uwagi przy obsłudze stanowiska i absolutnego stosowania się do zaleceń prowadzącego.
5. Podczas pobytu przy stanowisku laboratoryjnym zabrania się studentom wykonywania jakichkolwiek czynności, które nie są związane z realizowanym ćwiczeniem.

Literatura przedmiotu

1. K. P. Arczewski, J. Pietrucha, J. T. Szuster, *Drgania układów fizycznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2014.
2. M. Czech, A. Jakowluk, J. Kołybko, *Mechanika techniczna w przykładach i zadaniach – drgania*, Białystok 1987.
3. U. Fischer, M. Heinzler, F. Näher, H. Paetzold, R. Gomeringer, R. Kilgus, S. Oesterle, A. Stephan, oprac. merytor. wersji pol. J. Potrykus [tł. z niem.], *Poradnik mechanika*, Wydawnictwo REA, Warszawa 2014.
4. A. Górecki, *Technologia ogólna: podstawy technologii mechanicznych*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2014.
5. T. Sałaciński (red.), J. Misiak (red.), K. Jemielniak, A. Koć, T. Kowalski, L. Kwiatkowski, J. Zawistowski, *Ćwiczenia laboratoryjne z metrologii: praca zbiorowa*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2015.

6. B. Siołkowski, H. Holka, M. Malec, *Zbiór zadań ze statyki i wytrzymałości materiałów*, Wydawnictwo Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego w Bydgoszczy, Bydgoszcz 2015.

7. Z. Osiński, *Teoria drgań*, PWN, Warszawa 1978.

8. J. Warmiński, *Nieliniowe postacie drgań: układy dyskretne*, PWN, Warszawa 2011.